CARACTERISTICI DINAMICE; indicatori de calitate deduși în regim dinamic

Caracteristicile dinamice se referă la funcţionarea traductorului în regim dinamic, la care atât intrarea ***x(t)*** cât şi semnalul calibrat ***y(t)*** sunt variabile în timp.
În concordanţă cu ipotezele menţionate la caracteristicile statice, considerând traductorul ca un element liniar monovariabil intrare-ieşire, funcţionarea sa în regim dinamic este descrisă de ecuaţia diferenţială:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^{(j)}(t) \quad (*)$$

unde a_k şi b_j sunt coeficienţi constanţi (structura traductorului nu se modifică în timp), iar $n>m$ este condiţia de realizabilitate fizică.

Studiul dinamicii traductorului - şi implicit deducerea indicatorilor de performanţă în regim dinamic - presupune găsirea soluţiei ecuaţiei (*) pentru forme tipice (reprezentative) ale intrării *x(t)*.

Se pot utiliza două căi:

a) se determină *răspunsul în timp*, sau prin utilizarea calculului operaţional (transformata Laplace) în variabilă complexă *s*, dându-se intrării funcţii standard (impuls Dirac, treaptă unitate);

CARACTERISTICI DINAMICE; indicatori de calitate deduși în regim dinamic

b) se determină *răspunsul în frecvenţă*, considerând intrarea semnal sinusoidal cu amplitudine constantă şi frecvenţă variabilă.

<u>Cazul a)</u>

Aplicând transformata Laplace - în condiţii iniţiale nule - ecuaţiei (*) se obţine:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k s^k\right) Y(s) = \left(\sum_{j=0}^{m} b_j s^j\right) X(s) \qquad \Rightarrow \qquad Y(s) = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j s^j}{\sum_{k=0}^{n} a_k s^k} X(s)$$

în care ***X(s)*** este $$X(s) = \mathrm{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} \mathrm{d}t$$

Cu *Y(s)* determinat se poate trece în timp, folosind transformata Laplace inversă, adică:

$$y(t) = \mathrm{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_c - j\infty}^{\sigma_c + j\infty} Y(s) e^{ts} \mathrm{d}s$$

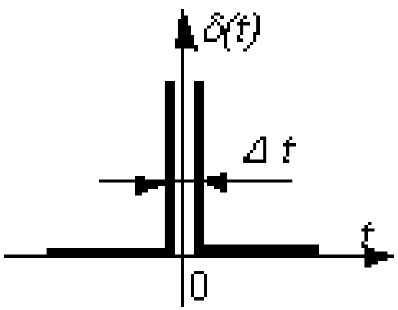
unde σ_c este abscisa de convergenţă pentru funcţia respectivă *Y(s)*.

CARACTERISTICI DINAMICE; indicatori de calitate deduşi în regim dinamic

Raportul $H(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)} = \dfrac{\sum_{j=0}^{m} b_j s^j}{\sum_{k=0}^{n} a_k s^k}$ se numeşte *funcţie de transfer*, prin intermediul căreia se poate interpreta - în domeniul variabilei complexe s - comportarea dinamică a traductorului (nu mai este necesară – pt.anumiţi indicatori – trecerea in timp.

Ca intrări caracteristice:

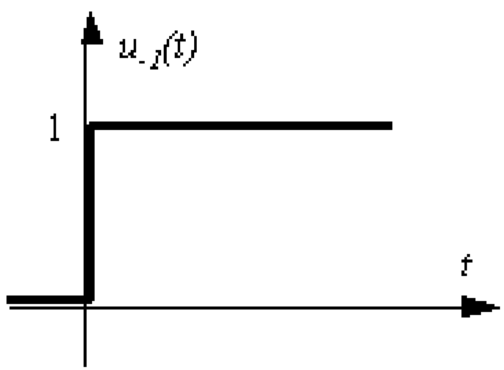
- *funcţia impuls Dirac* – cu reprezentarea din figura….- se defineşte prin impulsul de lăţime Δt şi înălţime $1/\Delta t$, cu $\Delta t \to 0$ considerat în jurul lui $t = 0$, deci aria impulsului este 1



$$\mathrm{L}[\delta(t)] = 1 \quad Y_\delta(s) = H(s) \quad y_\delta(t) = \mathrm{L}^{-1}[H(s)] = h(t)$$

h(t) se numeşte *funcţie pondere*.

- *funcţia treaptă unitate $u_{-1}(t)$* – figura…- a cărei transformată Laplace este



$$\mathrm{L}[u_{-1}(t)] = \frac{1}{s} \quad Y(s) = \frac{H(s)}{s} = K(s) \quad k(t) = \int_0^t h(\tau)\mathrm{d}\tau$$

k(t) - funcţie (răsp.) indicială.

CARACTERISTICI DINAMICE; indicatori de calitate deduși în regim dinamic

Cazul b)

Metodologia de exprimare a caracteristicilor dinamice din răspunsul la frecvenţă constă în aplicarea unei intrări $x(t) = X \sin\omega t$ cu X = constant şi ω variabil. Datorită liniarităţii, mărimea de ieşire - în regim stabilizat - va conserva frecvenţa, însă amplitudinea şi faza vor fi dependente de frecvenţă, adică:

$$y(t) = Y(\omega)\sin[\omega t + \varphi(\omega)]$$

sau, scrisă în complex, devine:

$$Y(j\omega) = Y(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

unde $Y(j\omega)$ reprezintă transformata Fourier directă a lui $y(t)$, adică:

$$Y(j\omega) = \Im[y(t)] = \int_0^{\infty} y(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

Aplicând transformata Fourier inversă rezultă

$$y(t) = \Im^{-1}[Y(j\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

Observație importantă: pentru sistemele fizic realizabile, TFD se obține din TLD înlocuind pe s cu $j\omega$.

Rezultă:

$$Y(j\omega) = H(j\omega)\cdot X(j\omega)$$

CARACTERISTICI DINAMICE; indicatori de calitate deduși în regim dinamic

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{|Y(j\omega)|}{|X(j\omega)|} e^{j[\arg Y(j\omega) - \arg X(j\omega)]} = \frac{Y(\omega)}{X} e^{j \arg Y(j\omega)} = H(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

Rezultă:

- caracteristica *amplitudine-pulsaţie*, **H(ω)** funcție de $0 < \omega < \infty$;
- caracteristica f*ază-pulsaţie*, **φ(ω)** funcție de $0 < \omega < \infty$.

Din ambele – determinate experimental – se poate pune în evidență funcția de transfer.

Observație importantă: D.p.d.v. dinamic un traductor are în structura sa 1 sau 2 elemente acumulatoare de energie – de natură mecanică, termică sau electromagnetică – astfel că acestea pot fi asimilate unor elemente de întârziere de ordinul I sau II, cu funcții de transfer cunoscute:

$$H_1(s) = \frac{k}{1 + Ts}; \quad H_2(s) = \frac{k}{1 + T_b s + T_a^2 s^2}$$

Indicatori de calitate (performanțe) în regim dinamic

A. Element de întârziere de ordinul I

Pornind de la forma generală:

$$a_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_0 y(t) = b_0 x(t)$$

iar cu notaţiile

$$\frac{a_1}{a_0} = T \quad ; \frac{b_0}{a_0} = k$$

se obţine ecuaţia diferenţială

$$T \frac{dy}{dt} + y(t) = k \cdot x(t) \quad \Big| \quad \mathsf{L}$$

şi funcţia de transfer corespunzătoare

$$H(s) = \frac{k}{1 + Ts}.$$

Considerând intrarea treaptă unitate $x(t) = u_{-1}(t)$, rezultă în domeniul variabilei complexe s

$$Y(s) = \frac{k}{s(1+Ts)} = k\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}}\right)$$

care, trecută în timp, conduce la funcţia indicială

$$y(t) = k(t) = k\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

Indicatori de calitate (performanțe) în regim dinamic (continuare)

Caracteristicile de frecvenţă, obţinute din H(jω) = H(s)$|_{s=j\omega}$, adică

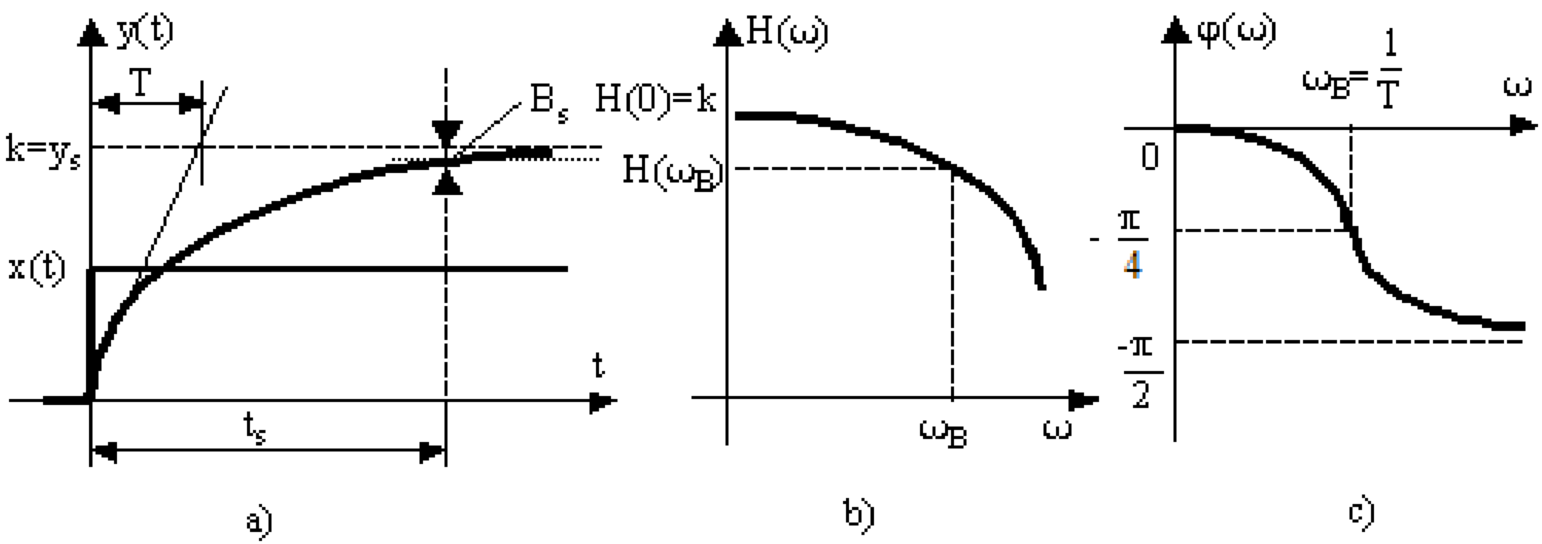
$$H(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T}$$

sunt

$$H(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \arg(k) - \arg(1 + j\omega T) = -\mathrm{arctg}\, T\omega$$

Funcţia indicială şi caracteristicile de frecvenţă au reprezentările din figura…



Indicatori de calitate (performanțe) în regim dinamic (continuare)

Indicatori:

1. *Eroarea* sau *abaterea dinamică* $\varepsilon_D(t)$ ca fiind

$\varepsilon_D(t) = y(t) - y_s$ cu observaţia că $\varepsilon_D(t) \to 0$ când $t \to \infty$.

Practic, se consideră că eroarea dinamică devine neglijabilă atunci când aceasta atinge un anumit procent din y_s şi nu-l mai depăşeşte ulterior (eroarea dinamică a intrat în *banda de stabilizare* B_s).

2. *Timpul de stabilizare sau timpul de răspuns* t_s

$$|\varepsilon_D(t)| \le B_s \;, \quad pt. \quad (\forall)\, t \ge t_s$$

Pentru traductoarele analogice B_s se ia în practică 2...5% din $y_s=k$

$$\left| k\left(1 - e^{-\frac{t_s}{T}}\right) - k \right| \le (0{,}02...0{,}05)k \qquad e^{-\frac{t_s}{T}} \le 0{,}02...0{,}05 \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{t_s}{T}} \ge 20...50$$

rezultând $\boldsymbol{t_s \ge (3...4)T}$.

Indicatori de calitate (performanțe) în regim dinamic (continuare)

3. *Constanta de timp T* se poate pune în evidenţă, pe figura a), ca fiind valoarea subtangentei pentru t = 0; într-adevăr

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = k\frac{1}{T}\left.e^{-\frac{t}{T}}\right|_{t=0} = \frac{k}{T} = \mathrm{tg}\alpha$$

Caracteristica amplitudine-pulsaţie arată caracterul de filtru trece-jos al elementului de întârziere de ordinul I. Pe această caracteristică se pune în evidenţă:

4. *Pulsaţia de bandă* ω_B ca fiind pulsaţia la care:

$$H(\omega_B) = \frac{1}{\sqrt{2}}H(0)\text{ , deci}\quad \frac{k}{\sqrt{1+\omega_B^2T^2}} = \frac{k}{\sqrt{2}}$$ obţinându-se $\boldsymbol{\omega_B = 1/T}$.

Observație: la caracteristica fază-pulsaţie există un punct de inflexiune pentru $\omega = \omega_B$ de valoare $\varphi(\omega_B) = -\pi/4$.

Indicatori de calitate (performanțe) în regim dinamic (continuare)

A. Element de întârziere de ordinul II

Ecuația diferențială:

$$a_2 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + a_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_0 y(t) = b_0 x(t) \qquad \text{cu notaţiile} \qquad \frac{a_2}{a_0} = T_a^2; \quad \frac{a_1}{a_0} = T_b; \quad \frac{b_0}{a_0} = k$$

devine: $$T_a^2 \frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + T_b \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + y(t) = kx(t) \qquad | \quad \mathrm{L}$$

funcţia de transfer corespunzătoare $$H(s) = \frac{k}{T_a^2 s^2 + T_b s + 1}$$

Funcţia indicială şi caracteristicile de frecvenţă se trasează în două cazuri distincte:

a) rădăcinile ecuaţiei caracteristice (de la numitor) sunt reale;

b) rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt complex conjugate.

NOTĂ: În practică mult mai întâlnit este regimul oscilatoriu amortizat obţinut atunci când rădăcinile ecuaţiei numitorului sunt complex conjugate.

Indicatori de calitate (performanțe) în regim dinamic (continuare)

Cu notaţiile: $T_a^2 = \dfrac{1}{\omega_n^2}$ si $T_b = \dfrac{2\xi}{\omega_n}$; cu $0 < \xi < 1$

rezultă ecuaţia caracteristică de forma $\dfrac{1}{\omega_n^2}s^2 + \dfrac{2\xi}{\omega_n}s + 1 = 0$

cu soluţiile $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

Pentru intrare treaptă unitate, se obţine:

$$y(t) = k(t) = k\left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t + \varphi\right)\right]$$

cu $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$

Deoarece $H(s) = \dfrac{k}{\dfrac{s^2}{\omega_n^2} + \dfrac{2\xi}{\omega_n}s + 1}$

rezultă $H(j\omega) = \dfrac{k}{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j\dfrac{2\xi\omega}{\omega_n}}$

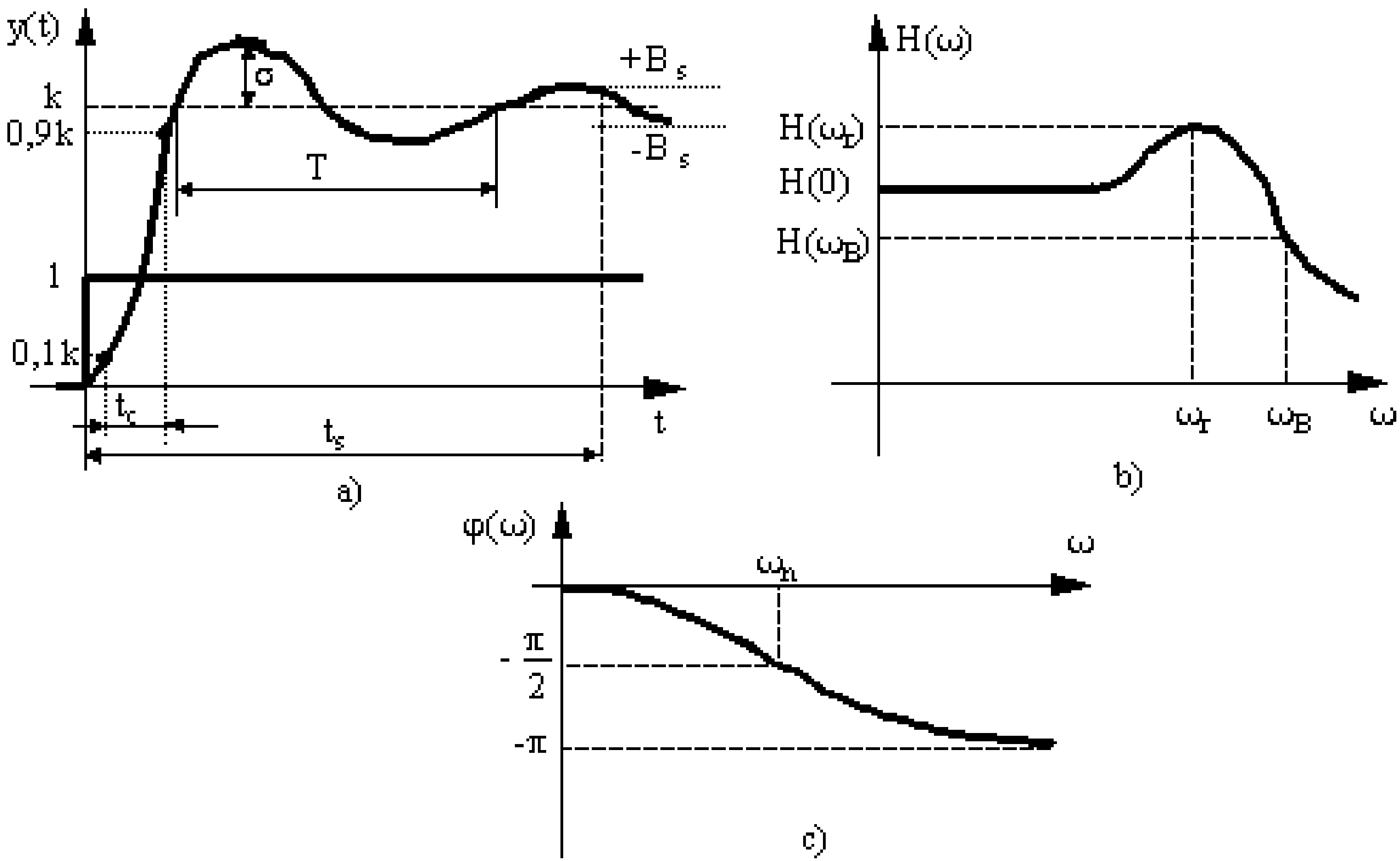
obţinându-se

$$H(\omega) = \frac{k}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}}}$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}\frac{2\xi\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

Indicatori de calitate (performanțe) în regim dinamic (continuare)

În figura… sunt date reprezentările grafice pentru răspunsul indicial şi caracteristicile de frecvenţă.



Indicatori de calitate (performanțe) în regim dinamic (continuare)

1. *Timpul de creştere* - t_c - ca fiind durata în care ieşirea parcurge distanţa dintre $0{,}1\cdot y_s$ şi $0{,}9\cdot y_s$ pe prima oscilaţie.

2. *Perioada oscilaţiilor amortizate* - *T* -, care are valoarea $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$

3. *Supracreşterea* - *σ* - eroarea dinamică corespunzătoare primului maxim al ieşirii; de obicei se exprimă sub formă relativă prin raportare la y_s, adică:

$$\sigma_r[\%]=\frac{y_{\max}-y_s}{y_s}\cdot 100$$

Deoarece max{y(t)} se asigură pentru t_{max} = T/2, rezultă că

$$y_{\max}=y_s\left(1+e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\right)$$

din care se obţine

$$\sigma_r[\%]=100\cdot e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

4. *Timpul de stabilizare* - t_s - legat de banda de stabilizare B_s prin intermediul erorii dinamice $\varepsilon_D(t) = y(t) - ys = y(t) - k$, adică $|\varepsilon_D(t)| \le B_s$ pentru orice $t \ge t_s$. Se poate scrie:

Indicatori de calitate (performanțe) în regim dinamic (continuare)

$$\left| y_s \frac{e^{-\xi\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\, t_s + \varphi\right) \right| \le B_s$$

Cum $\max\left(\sin \omega_n \sqrt{1-\xi^2}\, t + \varphi\right) = 1$, se obţine

$$-\xi\omega_n t_s \le \ln \frac{B_s \sqrt{1-\xi^2}}{y_s}$$

de unde

$$t_s \ge \frac{1}{\xi\omega_n} \ln \frac{y_s}{B_s \sqrt{1-\xi^2}}$$

Pe caracteristicile de frecvenţă – figuri...,b şi c - se pun în evidenţă următorii indicatori:

5. *Pulsaţia de rezonanţă* - ω_r - valoarea pentru care $H'(\omega) = 0$, adică:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

6. *Pulsaţia de bandă* - ω_B - valoarea pentru care amplitudinea $H(\omega_B) = H(0)/\sqrt{2}$, adică:

$$\frac{k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_B^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega_B^2}{\omega_n^2}}} = \frac{k}{\sqrt{2}}$$

din care se obţine

$$\omega_B = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2 + \sqrt{2 - 4\xi^2 + 4\xi^4}}$$

Indicatori de calitate (performanțe) în regim dinamic (continuare)

Observaţii:

1) Cu cât ω_n este mai mare cu atât ω_B este mai mare, T este mai mic, t_s mai mic, adică traductorul are o dinamică mai rapidă (mai bună);

2) Cu cât factorul de amortizare ξ creşte cu atât ω_B se micşorează, T creşte, t_s creşte, deci dinamica este mai lentă;

3) Creşterea lui ω_B produce lărgirea spectrului de frecvenţe a mărimii de intrare, în consecinţă se diminuează caracterul de filtru trece-jos al traductorului, astfel că acesta va măsura şi zgomotele, ştiindu-se faptul că acestea sunt de frecvenţe înalte.

Caracteristici energetice

Deoarece *traductoarele presupun preluarea unei mărimi printr-o operaţie de măsurare*, rezultă că *are loc un consum energetic*.

Puterea, care *prin integrare dă consumul energetic*, este *preluată total sau parţial de la mărimea de măsurat* (total în cazul mărimilor active şi parţial la cele pasive). Puterea preluată de la mărimea de măsurat nu poate depăşi o anumită limită denumită *putere disponibilă* pentru a nu influenţa valoarea mărimii de măsurat.

În general, oricărei mărimi X supuse măsurării i se poate asocia o altă mărime Y, astfel încât produsul lor XY să reprezinte o putere, iar raportul acestora X/Y să fie de natura unei impedanţe, denumită *impedanţă generalizată* sau *metrologică*

$$Z_m = \frac{X}{Y}.$$

Obţinerea unei impedanţe Z_m → preocupare permanentă în construcţia traductoarelor → perfecţionarea permanenta a elementelor sensibile - dimensiuni, masă - având în vedere că ele sunt cele care determină în cea mai mare măsură impedanţa Z_m.

Caracteristici energetice

Probleme puse în practica construcţiei traductoarelor:

● *adaptarea impedanţei* Z_m *cu cea a sursei* Z_s care produce mărimea activă de măsurat → se procedează la preluarea mărimii de măsurat cu amplificatoare de măsurare;

● prin folosirea amplificatorului, pe lângă *adaptarea în nivel* se realizează şi o *adaptare în putere*, rezultatul fiind o *adaptare în impedanţă*;

● dacă este posibilă o *metodă de zero* - măsurare fără consum energetic - echivalent cu o impedanţă $Z_m = \infty$ (este cazul punţilor cu echilibrare automată);
● în cazul mărimilor pasive, măsurarea presupune utilizarea unei surse auxiliare de energie → trebuie avute în vedere două aspecte:
♦ puterea preluată de la sursa auxiliară să fie folosită pentru conversia mărimii parametrice într-un semnal electric (tensiune, curent);
♦ să nu apară modificări ale valorii măsurate (de exemplu, în cazul unui termistor, să nu se producă o încălzire suplimentară la alimentarea cu o tensiune externă).

● O altă problemă este legată de consumul propriu - pe ansamblu - al traductorului.

Caracteristici constructive

Formele constructive sunt condiţionate - în mod esenţial - de natura aplicaţiei → pot fi diferite, chiar dacă mărimea şi domeniul de măsurare sunt aceleaşi.

Mai importante sunt:

- *robusteţea* - calitatea traductorului de a dispune de stabilitate în funcţionare (funcţionează la parametrii nominali).

-*capacitatea de supraîncărcare* reprezintă proprietatea unui traductor de a suporta valori ale mărimii de măsurat care depăşesc limita superioară a domeniului pentru care este destinat;

pe timp îndelungat - *suprasarcină* - *pe timp scurt* - *şoc*.

De reţinut: traductoarele au circuitul de ieşire prevăzut cu limitare de semnal, chiar dacă au loc depăşiri ale domeniului nominal al mărimii de intrare.

- *protecţia climatică* este în concordanţă cu zonele climatice (rece, temperată, tropical-umedă, tropical-uscată şi foarte rece), care corespund recomandărilor CEI.

- *protecţia contra exploziilor* cuprinde o serie de măsuri specifice aplicate în construcţia şi montarea traductoarelor pentru a evita aprinderea atmosferelor explozive exterioare.

- *protecţia anticorosivă* se referă la acele părţi - fie ale elementului sensibil, fie ale adaptorului - care vin în contact direct cu medii puternic corosive.

Caracteristici de fiabilitate

Fiabilitatea reprezintă proprietatea ca traductorul să funcţioneze în limitele indicatorilor săi de performanţă, adică fără defecţiuni, un interval de timp cât mai îndelungat. Poate fi: previzională, experimentală, operațională.

Dacă unui traductor i se pot preveni, depista şi înlătura defecţiunile se spune că acesta are proprietatea de *mentenabilitate*.

Proprietatea ca după efectuarea reparaţiilor (acţiuni de mentenanţă), să-şi recapete integral capacitatea de funcţionare se numeşte *restabilire*.

Disponibilitatea este proprietatea unui traductor ca acesta să-şi îndeplinească funcţia specificată sub aspectele combinate de fiabilitate, mentenabilitate şi de organizare a activităţii de mentenanţă la un anumit moment de timp sau într-un interval de timp dat.

Cauzele defecţiunilor sunt variate, fie întâmplătoare, fie sistematice (datorită îmbătrânirii componentelor), în consecinţă acestea se studiază probabilistic sau statistic. Se definesc astfel (probabilistic):

funcţia de defectare $F(t) = P(t \le T_f)$ T_f - timpul de bună funcţionare

funcţia de fiabilitate $R(t) = P(t > T_f)$ $R(t) = 1 - F(t).$

Alti indicatori importanti: MTBF, λ, z