Metode indirecte de masurare bazate pe relatii explicite

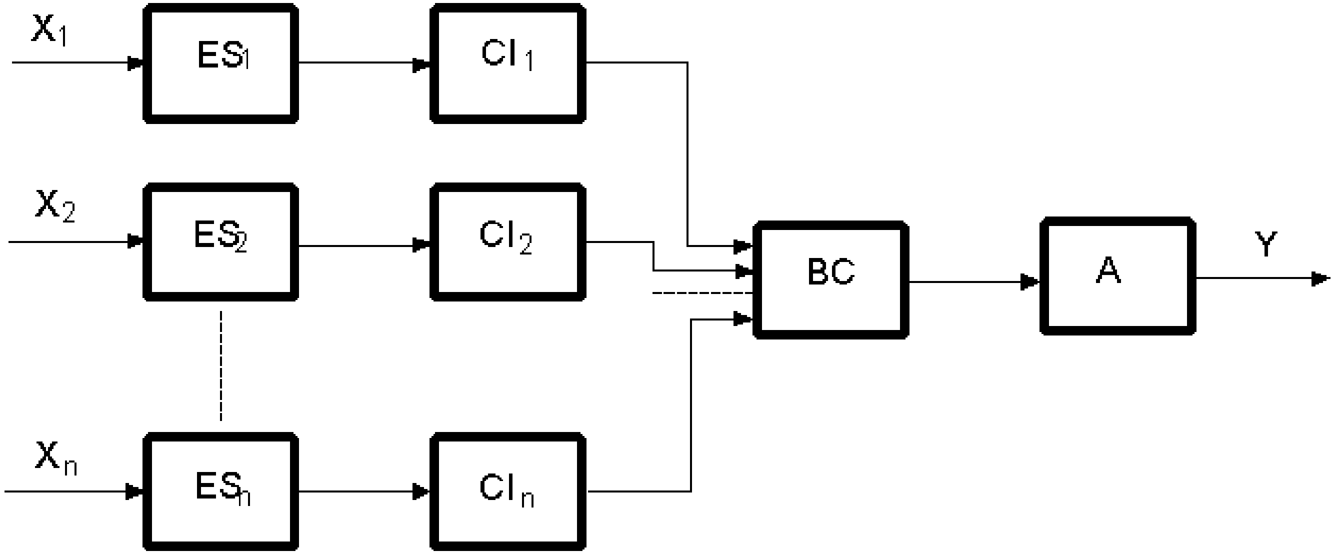
Metodele indirecte de masurare pot fi:

- Bazate pe relatii explicite
- Bazate pe relatii implicite

- Relatia explicita:

$$Y = f(X_1, X_2, ..., X_n)$$

- Structura unui aparat:



Calculul erorilor la masurarile indirecte bazate pe relatii explicite

- Fie relatia explicita:

$$Y = f(X_1, X_2, ..., X_N) \quad (*)$$

care leaga marimea indirect masurabila Y de marimile direct masurabile X_1, X_2, ..., X_N.

- Fiecare marime va fi afectata de o eroare, adica:

$$\Delta Y = Y_m - Y; \quad \Delta X_1 = X_{1_m} - X_1; ..., \quad \Delta X_N = X_{N_m} - X_N$$

indicele "m" semnificând faptul ca marimea respectiva este rezultatul masurarii, astfel ca:

$$\Delta Y = f(X_1 + \Delta X_1, X_2 + \Delta X_2, ..., X_N + \Delta X_N) - f(X_1, X_2, ..., X_N)$$

sau în valori relative

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{f(X_1 + \Delta X_1, X_2 + \Delta X_2, ..., X_n + \Delta X_n) - f(X_1, X_2, ..., X_n)}{f(X_1, X_2, ..., X_n)}$$

Calculul erorilor la masurarile indirecte bazate pe relatii explicite

- Analizam - în continuare - câteva cazuri particulare frecvent întâlnite în practica masurarilor:

  a) Relatie explicita de tip produs: $Y = X_1 \cdot X_2$

  Procedând ca la relatia generala rezulta:

$Y + \Delta Y = (X_1 + \Delta X_1)(X_2 + \Delta X_2) = X_1 \cdot X_2 + X_1 \cdot \Delta X_2 + X_2 \cdot \Delta X_1$ (se neglijează $\Delta X_1 \cdot \Delta X_2$ fiind un infinit mic de ordin superior). Deci: $\Delta Y = X_1 \cdot \Delta X_2 + X_2 \cdot \Delta X_1$ şi

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta X_1}{X_1} + \frac{\Delta X_2}{X_2}$$

  b) Relatie explicita de tip cât: $Y = X_1/X_2$

$$Y + \Delta Y = \frac{X_1 + \Delta X_1}{X_2 + \Delta X_2} = \frac{(X_1 + \Delta X_1)(X_2 - \Delta X_2)}{X_2^2 - (\Delta X_2)^2} = \frac{X_1 X_2 + X_2 \Delta X_1 - X_1 \Delta X_2 - \Delta X_1 \Delta X_2}{X_2^2 - (\Delta X_2)^2} \cong$$

$$\cong \frac{X_1 X_2 + X_2 \Delta X_1 - X_1 \Delta X_2}{X_2^2} = \frac{X_1}{X_2} + \frac{\Delta X_1}{X_1}\frac{X_1}{X_2} - \frac{\Delta X_2}{X_2}\frac{X_1}{X_2}$$

Calculul erorilor la masurarile indirecte bazate pe relatii explicite

Prelucrand in continuare relatia anterioara obtinem:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta X_1}{X_1} - \frac{\Delta X_2}{X_2}$$

Intrucât se considera cazul cel mai defavorabil (eroarea maxim posibila asupra lui Y), atunci trebuie sa luam:

$$\left|\frac{\Delta Y}{Y}\right|_{mp} = \frac{\Delta X_1}{X_1} + \frac{\Delta X_2}{X_2}$$

c) Relatie explicita de tip suma: $Y = X_1 + X_2$

Procedând similar rezulta:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{X_1}{X_1 + X_2} \cdot \frac{\Delta X_1}{X_1} + \frac{X_2}{X_1 + X_2} \cdot \frac{\Delta X_2}{X_2}$$

Calculul erorilor la masurarile indirecte bazate pe relatii explicite

d) Relatie explicita de tip diferenta: $Y = X_1 - X_2$

pentru care

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{X_1}{X_1 - X_2} \cdot \frac{\Delta X_1}{X_1} - \frac{X_2}{X_1 - X_2} \cdot \frac{\Delta X_2}{X_2}$$

Deoarece se considera cazul cel mai defavorabil rezulta:

$$\left|\frac{\Delta Y}{Y}\right|_{mp} = \frac{X_1}{|X_1 - X_2|} \cdot \left|\frac{\Delta X_1}{X_1}\right|_{mp} + \frac{X_2}{|X_1 - X_2|} \cdot \left|\frac{\Delta X_2}{X_2}\right|_{mp}$$

e) Relatie explicita de tip produs de marimi direct masurabile la puteri diferite de 1 (de exemplu de forma):

$$Y = X_1^a X_2^b X_3^c$$

în care a, b, c sunt exponenti pozitivi sau negativi, întregi sau fractionari.

Calculul erorilor la masurarile indirecte bazate pe relatii explicite

Procedând similar rezulta:

$$\left|\frac{\Delta Y}{Y}\right|_{mp} = |a|\cdot\left|\frac{\Delta X_1}{X_1}\right|_{mp} + |b|\cdot\left|\frac{\Delta X_2}{X_2}\right|_{mp} + |c|\cdot\left|\frac{\Delta X_3}{X_3}\right|_{mp}$$

❖ Cazurile particulare - evidentiate mai sus - sunt consecinte ale cazului general dedus astfel:

- presupunând functia *f* - relatia (*) - continua, si având în vedere ca erorile sunt mici, se procedeaza la dezvoltarea în serie Taylor a relatiei (*):

$$Y + \Delta Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N) + \frac{\partial f}{\partial X_1}\Delta X_1 + \frac{\partial f}{\partial X_2}\Delta X_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial X_N}\Delta X_N + R$$

unde *R* cuprinde termenii dezvoltarii de ordin superior care se neglijeaza.

Calculul erorilor la masurarile indirecte bazate pe relatii explicite

Asadar:

$$\Delta Y = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial X_k} \Delta X_k \qquad \text{sau} \qquad \frac{\Delta Y}{Y} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial X_k} \Delta X_k$$

Deoarece se considera cazul cel mai defavorabil, rezulta ca ultima relatie trebuie scrisa în forma:

$$\left|\frac{\Delta Y}{Y}\right|_{mp} = \sum_{k=1}^{N} \left|\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial X_k}\right| \cdot \left|\Delta X_k\right| \quad (**)$$

Se observa ca relatia (**) poate fi scrisa ca diferentiala logaritmica a functiei $f(X_1, X_2, ..., X_N)$, adica:

$$\left|\frac{\Delta Y}{Y}\right|_{mp} = \left|\mathrm{d}[\ln f(X_1, X_2, ..., X_N)]\right|$$

cu observatia ca, dupa efectuarea diferentialei, se înlocuieste dX_k cu ΔX_k, iar semnele “-” provenite de la diferentiere se considera cu "+", pentru a lua cazul maxim posibil.

Calculul erorilor la masurarile indirecte bazate pe relatii explicite

Exemplificare: In cazul masurarii indirecte a rezistivitatii electrice conform relatiei:

$$\rho = R\frac{S}{l}$$

unde R este rezistenta electrica a unui conductor de lungime l si sectiune S, rezulta:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \mathrm{d}\left[\ln R\frac{S}{l}\right] = \mathrm{d}[\ln R + \ln S - \ln l] = \frac{\mathrm{d}R}{R} + \frac{\mathrm{d}S}{S} - \frac{\mathrm{d}l}{l}$$

astfel ca:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta S}{S} + \frac{\Delta l}{l}$$

Regula: In cazul când marimea indirect masurabila se exprima prin produse sau rapoarte de marimi direct masurabile, eroarea relativa a marimii indirect masurabile este egala cu suma tuturor erorilor relative ale marimilor direct masurabile.

Metode indirecte bazate pe relatii implicite

- Forma relatiei de dependenta
- Exemplificare:

$$R_\theta = R_{\theta_0}[1+\alpha(\theta-\theta_0)+\beta(\theta-\theta_0)^2+\gamma(\theta-\theta_0)^3]$$

- Pentru 3 temperaturi din domeniu → valori α, β, γ care verifica relatia doar în cele 3 puncte
- Concluzia: se procedeaza la cresterea numarului de determinari $[R_{\theta i}, i]$ → sistem incompatibil
- Rezolvarea: adoptarea unei solutii aproximative (gasirea unor estimatii $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$ care sa verifice aproximativ relatia, însa cu o abatere (eroare) minima
- *metoda celor mai mici patrate*

Metoda celor mai mici patrate

- Fie relatia implicita:

$$Y = f(X_1, X_2, ..., X_N; k_1, k_2, ..., k_r)$$

unde: $Y, X_1, X_2, \ldots, X_N$ - marimi direct masurabile;
$k_1, k_2, \ldots, k_r$ – marimi indirect masurabile

- Se fac n seturi de masurari, $n > r$, rezulta sistemul (incompatibil):

$$Y_i = f(X_{1i}, X_{2i}, ..., X_{Ni}; k_1, k_2, ..., k_r) \qquad i = 1, 2, ..., n$$

- Se inlocuiesc valorile exacte $k_1, k_2, \ldots, k_r$ cu estimatiile $\hat{k}_1, \hat{k}_2, ..., \hat{k}_r$

$$\varepsilon_i = Y_i - f(X_{1i}, X_{2i}, ..., X_{Ni}; \hat{k}_1, \hat{k}_2, ..., \hat{k}_r) \qquad i = 1, 2, ..., n$$

- Se construieste expresia:

$$E = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [Y_i - f(X_{1i}, X_{2i}, ..., X_{Ni}; \hat{k}_1, \hat{k}_2, ..., \hat{k}_r)]^2$$

- Se rezolva sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial \hat{k}_1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial E}{\partial \hat{k}_r} = 0 \end{cases} \Rightarrow \qquad \hat{k}_1, \hat{k}_2, ..., \hat{k}_r$$

Aplicarea teoriei informaţiei la evaluarea erorilor de măsurare

Să considerăm, mai întâi, cazul discret în care un sistem poate avea n stări posibile (se pot da n răspunsuri despre starea acestuia), fiecare stare având probabilitatea de apariţie p_i cu i = 1, 2, ..., n.

Presupunem că $p1 \neq p2 \neq ... \neq pn$; în aceste condiţii *entropia* sistemului reprezintă contribuţia celor n stări posibile, adică

$$H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_c p_i$$

deoarece $p_i < 1$, datorită semnului minus, entropia H rezultă pozitivă.

Entropia informaţională H exprimă gradul de nedeterminare a sistemului, sau gradul de incertitudine în cunoaşterea acestuia.

Atunci când se obţine o informaţie despre sistemul considerat, gradul lui de nedeterminare (incertitudine) scade.

Să presupunem că diferitele răspunsuri care se pot atribui stărilor posibile au, în urma informaţiei primite, noile probabilităţi p_1', p_2', ..., p_n'.

Prin definiţie *cantitatea de informaţie* I primită este diferenţa dintre entropia informaţională iniţială şi ulterioară (înainte şi după primirea informaţiei), adică:

Aplicarea teoriei informaţiei la evaluarea erorilor de măsurare

$$I = H(p_i) - H(p_i^{'}) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i + \sum_{i=1}^{n} p_i^{'} \log p_i^{'} \quad (*)$$

I se mai numeşte şi entropie diferenţială.

Cantitatea de informaţie permite definirea conceptului de *eroare entropică* pornind de la următorul raţionament:

- presupunem că luăm cazul continuu, adică relaţia (*) se scrie

$$I = -\int_{X_{\min}}^{X_{\max}} p_0(x) \log p_0(x) \mathrm{d}x + \int_{X_{\min}}^{X_{\max}} p(x) \log p(x) \mathrm{d}x \quad (**)$$

unde x este valoarea mărimii de măsurat, $p_0(x)$ densitatea de probabilitate înainte de măsurare, p(x) densitatea de probabilitate după măsurare, iar $X_{min} \ldots X_{max}$ domeniul de măsurare a lui x;

- dacă iniţial, înainte de măsurare, x se poate afla oriunde în intervalul $X_{min} \ldots X_{max}$, cu aceeaşi probabilitate, deci se admite o repartiţie uniformă, adică

Aplicarea teoriei informaţiei la evaluarea erorilor de măsurare

$$p_0(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{X_{\max} - X_{\min}} & \text{daca} \quad X_{\min} \le x \le X_{\max} \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$$

în ceea ce priveşte entropia obţinută după măsurare, densitatea de probabilitate p(x) va diferi în funcţie de tipul repartiţiei erorilor; al doilea termen din expresia (**) se numeşte *entropie condiţionată* rămasă după efectuarea măsurării.

- dacă erorile sunt repartizate uniform, adică $p(x) = \dfrac{1}{2\Delta_s}$ atunci

$$H(x) = \int_{-\Delta_s}^{+\Delta_s} \frac{1}{2\Delta_s} \log\left(\frac{1}{2\Delta_s}\right) \mathrm{d}\Delta_s = \log(2\Delta_s) \quad (\#)$$

- dacă erorile sunt repartizate normal, adică $p(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ atunci

$$H(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \log\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right) \mathrm{d}x = \log(\sqrt{2\pi e}\,\sigma) \quad (\#\#)$$

Aplicarea teoriei informaţiei la evaluarea erorilor de măsurare

- pentru alte tipuri de repartiţii rezultă expresii corespunzătoare pentru H(x);
- pentru a avea aceeaşi cantitate de informaţie trebuie ca entropia condiţionată rămasă după efectuarea măsurării să fie aceeaşi, astfel că erorile având repartiţii diferite pot fi reduse - pe baza acestui raţionament - la una singură (caracterizată de un anumit tip de repartiţie). Noviţki [1968] a avut ideea de a echivala eroarea repartizată după o lege oarecare la eroarea echivalentă uniform repartizată pe intervalul dat.

Din egalitatea relaţiilor (#) şi (##) rezultă

$$\Delta_e = \sqrt{\frac{\pi e}{2}}\ \sigma \cong 2{,}07 \cdot \sigma$$

unde Δ_e reprezintă eroarea entropică a repartiţiei normale.

In general

$$\Delta_e = K_e \cdot \sigma_r$$

unde K_e este coeficientul entropic al repartiţiei r caracterizată prin eroarea medie pătratică σ_r.

De exemplu, se ştie că la repartiţia uniformă $\sigma_r = \Delta_s/\sqrt{3}$, deci $\Delta_s = \Delta_e = \sqrt{3}\cdot\sigma_r$, de unde $K_e = \sqrt{3}$.

Teoretic K_e poate varia între 0 şi 2,07, dar practica a arătat că majoritatea rezultatelor experimentale au repartiţii combinate, care conduc la valori pentru K_e cuprinse între $\sqrt{3}$ = 1,73 şi 2,07.

Aplicarea teoriei informaţiei la evaluarea erorilor de măsurare

De aceea s-a adoptat valoarea $K_e = 2$ atunci când se combină mai multe erori parţiale cu repartiţii diferite, adică

$$\Delta_e = K_e \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\Delta_{e_i}}{K_i} \right)^2}$$

unde $K_e = 2$, iar K_i este conform repartiţiei nr.i cu eroarea entropică Δ_{ei}.

De exemplu, combinaţia dintre erorile sistematice necontrolabile, caracterizate de repartiţia uniformă în intervalul $[-\Delta_s, +\Delta_s]$ cu $\sigma_{s,n} = \Delta_s/\sqrt{3}$ şi erorile aleatorii caracterizate de repartiţia normală cu σ_Δ, conduce la

$$\Delta_e = K_e \sqrt{\left(\frac{\Delta_{e_s}}{K_{e_s}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta_{e_a}}{K_{e_a}} \right)^2} = K_e \sqrt{\frac{\Delta_s^2}{3} + \sigma_\Delta^2} = K_e \cdot \sigma_{tot}$$

unde σ_{tot} este eroarea medie pătratică totală (incertitudinea) obţinută la combinarea din teoria clasică a erorilor. Dacă $K_e = 2$ se obţine aşa numita incertitudine compusă de nivel 2σ, care are un nivel de încredere $\eta = 0,95$ acoperitor în majoritatea aplicaţiilor.