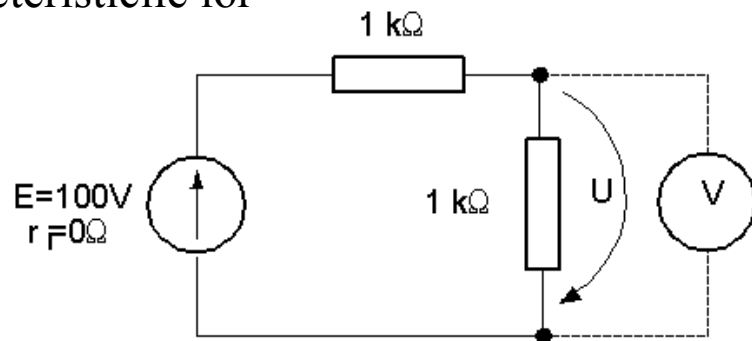


# Erori sistematice (controlabile și/sau necontrolabile)

- ❖ Ce se precizează:
  - ❖ Tipul (tipurile) de aparate utilizate prin caracteristicile lor
  - ❖ Metoda de măsurare (directă/indirectă)
  - ❖ Condițiile de experimentare

Exemple:

Se dispune de două voltmetre magnetoelectrice având caracteristicile:



Voltmetrul	$V_1$	$V_2$
Domenii	0÷24V; 0÷60V; 0÷120V	0÷10V; 0÷25V; 0÷100V
Clasa de precizie	0,5	1
Rez.internă raportată $r_V$	500 $\Omega/V$	5000 $\Omega/V$

Să se aleagă voltmetrul care măsoară tensiunea  $U$ , din montajul prezentat în fig...., cu eroare sistematică minimă.

# Erori sistematice (controlabile si/sau necontrolabile)

## Rezolvare

Eroarea sistematică totală conține o componentă controlabilă provocată de consumul propriu al voltmetrului și o componentă necontrolabilă determinată de clasa de precizie a voltmetrului, adică:

$$\Delta U_{sist}^{tot} = \Delta U_{sist}^c + \Delta U_{sist}^{nc}$$

unde cu indicele superior "c" s-a notat componenta controlabilă, iar cu indicele "nc" cea necontrolabilă.

Eroarea sistematică controlabilă se determină ca diferența dintre căderea de tensiune pe rezistența  $R = 1\text{k}\Omega$  în cazul ideal - când voltmetrul ar avea rezistența la borne infinită - și cazul real - atunci când rezistența acestuia este  $R_b = r_v \cdot \text{DOMENIU}$ .

Deci:

$$\Delta U_{sist}^c = U_{id} - U_{real} = \frac{E}{2} - \frac{E}{R + R \parallel R_b} (R \parallel R_b) = \frac{R}{2(R + 2R_b)} E$$

# Erori sistematice (controlabile si/sau necontrolabile)

Eroarea sistematică necontrolabilă este

$$\Delta U_{sist}^{nc} = \Delta U_{ad} = \frac{c_V \cdot U_{max}}{100}$$

Cum tensiunea  $U$  este de aproximativ 50 V rezultă că  $V_1$  poate fi utilizat pe ultimile două domenii, iar  $V_2$  numai pe al treilea, așadar:

$$\Delta U_{sist}^{tot} \Big|_{V_1:0...60V} = \frac{1k\Omega}{2(1k\Omega + 2 \cdot 30k\Omega)} 100V + \frac{0,5 \cdot 60V}{100} = 0,82 + 0,3 = 1,12V$$

$$\Delta U_{sist}^{tot} \Big|_{V_1:0...120V} = \frac{1k\Omega}{2(1k\Omega + 2 \cdot 60k\Omega)} 100V + \frac{0,5 \cdot 120V}{100} = 0,41 + 0,6 = 1,01V$$

$$\Delta U_{sist}^{tot} \Big|_{V_2:0...100V} = \frac{1k\Omega}{2(1k\Omega + 2 \cdot 500k\Omega)} 100V + \frac{1 \cdot 100V}{100} = 0,05 + 1 = 1,05V$$

Rezultă că trebuie folosit voltmetrul  $V_1$  pe domeniul 0÷120V.

# Erori sistematice (controlabile si/sau necontrolabile)

■ **ATENȚIE!** la următoarele aspecte:

- se dau aparatele prin caracteristici și se impune drept criteriu minimizarea erorii sistematice controlabile: răspuns?
- idem, iar drept criteriu se impune minimizarea erorii sistematice necontrolabile: răspuns?
- se precizează montajul și aparatele prin caracteristicile lor, iar cerința este: precizați valoarea erorii sistematice de metoda;
- idem ca la cazul anterior, iar cerința este: precizați valoarea erorii relative a măsurării indirecte a .... (rezistenței, puterii etc)

**Observație importantă:** De obicei se precizează un aparat prin cât mai multe caracteristici; la o problemă, sau un subpunct de problemă, doar anumite caracteristici trebuie luate în considerare!

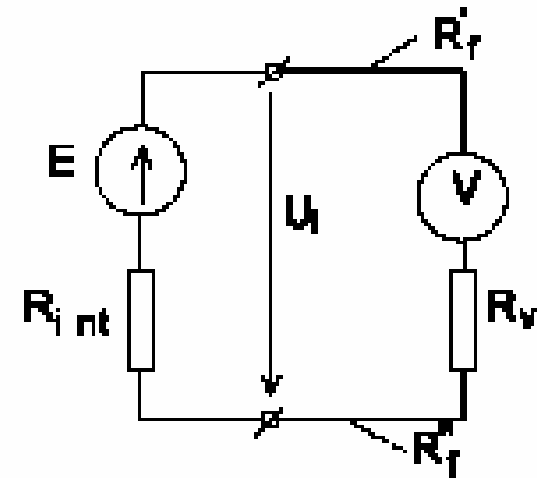
# Combinatii de erori sistematice si aleatorii

Exemplu:

Pentru măsurarea tensiunii unei surse de 50 V și rezistență internă  $R_{int} = 1 \Omega$  se utilizează un voltmetru având caracteristicile: scara  $0 \div 100 \text{ V}$ ;  $R_i = 1 \text{ k}\Omega/\text{V}$ . Valorile obținute sunt următoarele: 48,5; 48; 47,5; 48,5; 48 [V].

Considerând erorile sistematice necontrolabile introduse de clasa de precizie a voltmetrului ca fiind neglijabile, neglijând rezistența firelor de legătură a voltmetrului la sursă și considerând un reglaj de nul defectuos făcut astfel că aparatul indică + 0,5 V, se cere, ca pe baza datelor obținute, să se determine:

- valoarea care aproximează cel mai bine valoarea reală a tensiunii sursei;
- estimația dispersiei reale a valorilor măsurate;
- dacă clasa de precizie a voltmetrului este  $c = 0,5$ , iar rezistența internă a acestuia suficient de mare pentru a neglija erorile sistematice controlabile introduse de metoda de măsurare, să se calculeze estimația dispersiei reale totale a selecției de determinare.



# Combinatii de erori sistematice si aleatorii

## Rezolvare

a) Fiecare determinare este afectată de o eroare sistematică de metodă (controlabilă), adică:

$$E_i = U_i + \frac{R_{\text{int}} + R_f}{R_{\text{int}} + R_f + R_V} E_i$$

unde  $R_f = R_f' + R_f''$  (vezi fig....) este rezistența firelor de legătură considerată neglijabilă ( $R_f \approx 0$ ).

Deci:

$$E_i = \frac{U_i}{1 - \frac{R_{\text{int}}}{R_{\text{int}} + R_V}}, \quad i = 1, 2, \dots, 5$$

Dar valoarea indicată de voltmetru  $U_i$  este cu 0,5 V în plus (pentru fiecare determinare) astfel că tensiunea la borne  $U_i$  va fi:

# Combinatii de erori sistematice si aleatorii

$$U_i = U_{V_i} - 0,5 \text{ [V]}$$

Deci:

$$E_i = \frac{U_{V_i} - 0,5}{1 - \frac{R_{\text{int}}}{R_{\text{int}} + R_V}} = \frac{U_{V_i} - 0,5}{1 - \frac{1}{1 + 100000}} \cong \frac{U_{V_i} - 0,5}{1} = U_{V_i} - 0,5 \text{ [V]}$$

(se verifică ipoteza neglijării erorilor sistematice controlabile de la punctul c) al problemei).

Asadar:

$$m_{V_E} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 E_i = 47,6 \text{ V}$$

b)

$$\hat{\sigma}_U^2 = \hat{\sigma}_E^2 = \frac{1}{5-1} \sum_{i=1}^5 (E_i - m_{V_E})^2 = 0,1764 \text{ [V}^2 \text{]}$$

# Combinatii de erori sistematice si aleatorii

c) Erorile sistematice necontrolabile sunt date de clasa de precizie, adica:

$$\Delta_s = \Delta X_{ad} = \frac{c \cdot X_{\max}}{100} = \frac{0,5 \cdot 100V}{100} = 0,5 \text{ V}$$

iar compunerea erorilor aleatorii cu cele sistematice necontrolabile se face pătratic, astfel că:

$$\hat{\sigma}_{E_{tot}}^2 = \hat{\sigma}_E^2 + \frac{\Delta_s^2}{3} = 0,1764 + \frac{(0,5)^2}{3} \cong 0,26 [\text{V}^2]$$

■ **ATENȚIE!** la unele aspecte, cum ar fi:

- pentru a combina trebuie sa avem ambele categorii de erori;
- erorile sistematice sunt introduse de aparate; ele pot fi controlabile sau necontrolabile;
- erorile aleatorii apar numai la experiment repetat!, deci presupun o selectie de volum  $n$ .



# Combinatii de erori sistematice si aleatorii

- daca aparatul cu care se fac determinarile are o deviatie – observata dupa incetarea experimentului! – se procedeaza la combinarea patratica considerand erorile sistematice controlabile constante (a se vedea cursul);
- daca instrumentul nu prezinta o astfel de deviatie se face combinarea patratica considerand eroarea sistematica necontrolabila dedusa din clasa de precizie;
- se poate intalni cazul – intr-un enunt cu mai multe subpuncte – ca deviatia initiala observata la sfarsitul experimentului repetat sa fie specificata la ultimul subpunct; in astfel de situatii se rezolva subpunctele in ordine stricta, tinand seama de datele avute la dispozitie pana la fiecare subpunct.
- a nu se confunda combinarea erorilor sistematice si aleatorii cu eroarea limita (prezentata la acelasi paragraf de curs!); eroarea limita se foloseste in prezentarea rezultatului masurarii fiind un caz particular de combinare (cazul la limita!). ***Cocluzia: a se citi cu mare atentie cerinta (cerintele) problemei!***

# Prezentarea rezultatelor masurarilor

În urma măsurării repetate a curentului într-un circuit s-au obținut următoarele rezultate:

Nr.det.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$I_i$ [mA]	50	49,5	48,5	50,5	51	49	51	50,5	49	51

Cunoscând că ampermetrul cu care s-a făcut măsurarea are 100 diviziuni, scara 100 mA, clasa de precizie 1 și o deviație inițială a acului de + 2 diviziuni, să se precizeze intervalul limită în care se încadrează valoarea reală a curentului din circuit.

## Rezolvare

Deoarece avem atât erori sistematice (controlabile - date de deviația inițială a acului indicator - și necontrolabile - date de clasa de precizie) cât și erori aleatorii (observate prin faptul că, la repetarea experimentului, în aceleași condiții, s-au obținut rezultate diferite), rezultă că eroarea limită este:

$$\varepsilon'_{\text{lim}_1} = -\delta_0 - \sqrt{\left(t \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right)^2 + \Delta_s^2} ; \quad \varepsilon'_{\text{lim}_2} = -\delta_0 + \sqrt{\left(t \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right)^2 + \Delta_s^2} \quad 10$$

# Prezentarea rezultatelor masurarilor

(s-a utilizat repartiția Student întrucât numărul de determinări este  $n = 10$  deci  $< 20$ ), iar curentul real  $I$  din circuit se va afla în intervalul:

$$I \in \left[ m_I - \delta_0 - \sqrt{\left( t \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right)^2 + \Delta_s^2} ; m_I - \delta_0 + \sqrt{\left( t \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right)^2 + \Delta_s^2} \right]$$

Se calculează:

$$m_I = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} I_i = 50 \text{ mA}$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{10-1} \sum_{i=1}^{10} (m_I - I_i)^2} = 0,94 \text{ mA}$$

$$\delta_0 = \frac{2 \text{ div} \cdot 100 \text{ mA}}{100 \text{ div}} = 2 \text{ mA}$$

$$\Delta_s = \Delta X_{ad} = \frac{c \cdot X_{\max}}{100} = \frac{1 \cdot 100}{100} \text{ mA} = 1 \text{ mA}$$

# Prezentarea rezultatelor masurarilor

iar din tabele (ANEXA D din carte!) rezultă, pentru  $\eta = 0,99$  și  $n = 10$ ,  $t = 3,169$ .

Deci:

$$I \in [46,63 \text{ mA} ; 49,37 \text{ mA}]$$

sau:

$$I = 48 \text{ mA} \pm 1,37 \text{ mA}$$

■ **ATENȚIE!** La unele aspecte, cum ar fi:

- volumul selectiei  $n$ , care precizeaza tipul de repartitie utilizata: normala (Gauss) pentru  $n \geq 20$  cu  $\eta = 0,9973$  (subinteles!), respectiv Student pentru  $n \leq 10$  cu  $\eta = 0,99$  (subinteles!);
- tipurile de erori care apar:
  - daca sunt numai erori sistematice atunci se refera la o singura determinare (nu se da selectie de date!);
  - daca se dau mai multe determinari se aplica formulele de la cazurile expuse la curs, cu identificarea categoriilor de erori sistematice deduse din caracteristicile aparatelor.

# Prezentarea rezultatelor masurarilor

- daca se precizeaza si un anumit montaj rezulta ca pot apare erori sistematice de metoda, care se compenseaza (elimina);
- daca masurarea este indirecta trebuie sa se tina seama de ponderarea corespunzatoare a erorii limita cu termenul dedus din relatia explicita de dependenta; Exemplificare:

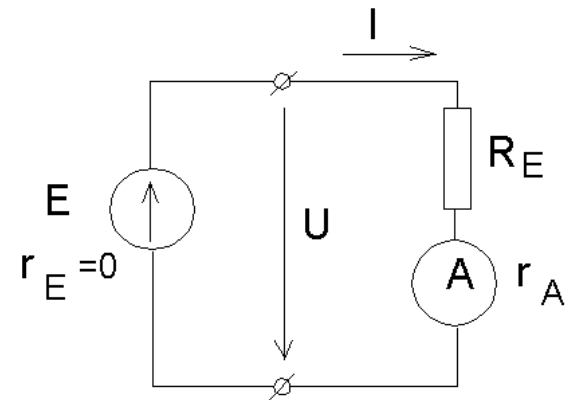
In vederea determinării t.e.m.  $E$  a unei surse cu rezistență internă neglijabilă ( $r_E \approx 0$ ) se dispune de o rezistență etalon  $R_E = 24 \Omega$  și un ampermetru  $A$  având domeniul de măsurare  $0 \div 3A$ , clasa de precizie 1 și căderea de tensiune la borne  $U_A = 300 \text{ mV}$  pentru indicația maximă de pe scală.

In urma efectuării a 50 de măsurări și prelucrării acestora s-a obținut valoarea medie a curentului  $I_{\text{med}} = 2 \text{ A}$  cu abaterea medie pătratică de selecție  $\mu_I^2 = 16/50 \text{ A}^2$ .

Să se precizeze:

- a) Valoarea cea mai probabilă a t.e.m.  $E$ ;
- b) Intervalul limită în care se încadrează valoarea

reală a t.e.m.  $E$ .



## Rezolvare

a) Deoarece (fig.....)

# Prezentarea rezultatelor masurarilor

$$E = U = (R_E + r_A)I$$

rezultă că valoarea cea mai probabilă a t.e.m.  $E$  este media

$$m_E = (R_E + r_A)I_{med}$$

Cum

$$r_A = \frac{U_A}{I_{max}} = \frac{300 \text{ mV}}{3 \text{ A}} = 0,1 \Omega$$

se obține

$$m_E = (24 + 0,1) \cdot 2 = 48,2 \text{ V}$$

b) Numărul de date experimentale fiind  $n = 50 (> 20)$  se folosește repartiția Gauss, cu nivelul de încredere  $\eta = 0,9973$ , pentru care se poate scrie:

# Prezentarea rezultatelor masurarilor

$$E \in \left[ m_E - (R_E + r_A) \sqrt{\left( 3 \frac{\hat{\sigma}_I}{\sqrt{n}} \right)^2 + \Delta_{sI}^2} ; m_E + (R_E + r_A) \sqrt{\left( 3 \frac{\hat{\sigma}_I}{\sqrt{n}} \right)^2 + \Delta_{sI}^2} \right]$$

Deoarece:

$$\hat{\sigma}_I = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \mu_I = \sqrt{\frac{50}{49}} \frac{4}{\sqrt{50}} = 0,57 \text{ A} \quad \Delta_{sI} = \Delta I_{ad} = c_A \cdot \frac{I_{\max}}{100} = 1 \cdot \frac{3}{100} = 0,03 \text{ A}$$

rezultă:

$$E \in [48,2 - 4,784 ; 48,2 + 4,784] = [43,416 \text{ V} ; 52,984 \text{ V}] \quad \text{sau}$$

$$E = 48,2 \text{ V} \pm 4,784 \text{ V}$$

Se observă că, fiind o metodă indirectă de măsurare, rezultă un interval mare de încadrare, față de situația folosirii unui voltmetru - măsurare directă - de aceeași clasă de precizie.