Combinarea (compunerea) erorilor sistematice şi aleatorii

- Pâna în prezent atât erorile sistematice cât şi cele aleatorii s-au determinat (evaluat) individual, considerând absenţa unora. Totuşi, în realitate, măsurarile sunt afectate simultan de ambele categorii de erori.

- Modalitatea cea mai indicată de combinare este prin eroarea medie pătratică, întrucât semnele nu mai sunt luate în consideraţie.

➢ În principiu, sunt două cazuri care trebuie analizate:

a) *eroarea sistematică* este *constantă*, adică $\delta_s = \delta_0 = ct.$

b) *eroarea sistematică* este *variabilă*, adică $\delta_s = \delta_i \neq ct$

! **Vom nota**: eroarea totală ε_i, ţinând seama de eroarea aleatorie Δ_i, adică

$$\varepsilon_i = \Delta_i + \delta_i$$

la care vom aplica combinarea de tip pătratic pentru cele două cazuri.

Combinarea (compunerea) erorilor sistematice şi aleatorii

a) Ridicând la pătrat şi făcând valoarea medie rezultă:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2 + \frac{2}{n}\delta_0\sum_{i=1}^{n}\Delta_i + \delta_0^2 = \hat{\sigma}_\Delta^2 + \delta_0^2$$

Asadar, estimaţia erorii medii pătratice totale este:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \hat{\sigma}_\Delta^2 + \delta_0^2$$

Remarcă: Valoarea medie a lui ε_i este diferită de zero, adică:

$$m_\varepsilon = M[\varepsilon_i] = M[\Delta_i + \delta_0] = \delta_0$$

- Deoarece erorile aleatorii Δ_i au funcţia de densitate conform repartiţiei normale (gaussiene), rezultă că $p(\varepsilon)$ va fi tot de tip normal, dar centrată pe valoarea δ_0, adică:

$$p(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma_\Delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\varepsilon-\delta_0)^2}{2\sigma_\Delta^2}}$$

Combinarea (compunerea) erorilor sistematice şi aleatorii

- Pentru o valoare individuală V_i intervalul în care se situează valoarea reală X este:

$$V_i - \varepsilon_{\lim} \leq X \leq V_i + \varepsilon_{\lim}$$

unde

$$-\varepsilon_{\lim} = -3 \cdot \sigma_{\Delta} + \delta_0 \,; \quad +\varepsilon_{\lim} = +3 \cdot \sigma_{\Delta} + \delta_0$$

iar prin considerarea valorii medii:

$$m_V - \varepsilon'_{\lim} \leq X \leq m_V + \varepsilon'_{\lim}$$

unde

$$-\varepsilon'_{\lim} = -\frac{3\sigma_{\Delta}}{\sqrt{n}} + \delta_0 \,; \quad +\varepsilon'_{\lim} = +\frac{3\sigma_{\Delta}}{\sqrt{n}} + \delta_0$$

Combinarea (compunerea) erorilor sistematice şi aleatorii

b) Procedând similar ca la cazul a), cu observaţia că *eroarea sistematică* este *variabilă*, adică $\delta_i \neq ct$, deci $\varepsilon_i = \Delta_i + \delta_i$, rezultă:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2 + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i\delta_i$$

Cum Δ_i şi δ_i provin din surse independente, conform postulatului 3, rezultă că:

$$\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i\delta_i = 0$$

şi, în consecinţă,

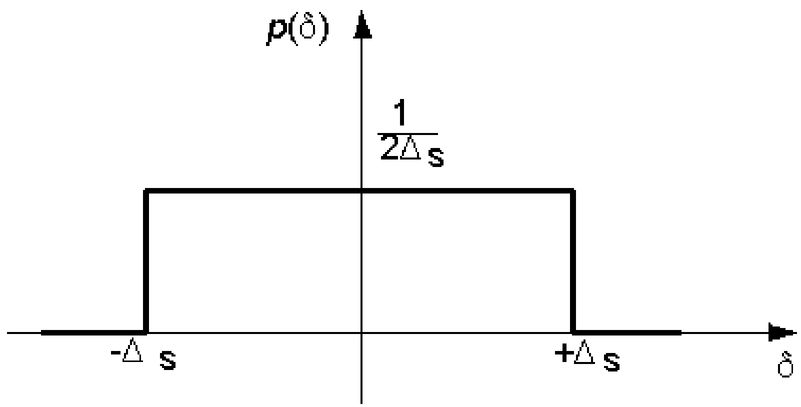
$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \hat{\sigma}_\Delta^2 + \sigma_\delta^2$$

Se disting două cazuri în determinarea lui σ_δ^2:

Combinarea (compunerea) erorilor sistematice şi aleatorii

b_1) Dacă δ_i este o eroare sistematică controlabilă variabilă valoarea $\sigma_\delta^2 = M[\delta_i^2]$ se deduce, de la caz la caz, prin cunoaşterea fenomenului care produce pe δ_i.

b_2) În cazul când δ_i este o eroare sistematică necontrolabilă, se admite legea de repartiţie uniformă pentru ea, în intervalul $[-\Delta_s,+\Delta_s]$ ca în figura…, rezultând:



$$p(\delta) = \frac{1}{2 \cdot \Delta_s}$$

şi

$$\sigma_\delta^2 = \int_{-\Delta_s}^{+\Delta_s} \delta^2 p(\delta) \mathrm{d}\delta = \int_{-\Delta_s}^{+\Delta_s} \delta^2 \frac{1}{2 \cdot \Delta_s} \mathrm{d}\delta = \frac{\Delta_s^2}{3}$$

Combinarea (compunerea) erorilor sistematice şi aleatorii

- Eroarea limită, calculată pe baza unei combinări pătratice, este:
  - pentru valori individuale:

$$\pm\varepsilon_{\lim} = \pm\sqrt{\Delta_{\lim}^{2} + \delta_{\lim}^{2}} = \pm\sqrt{(3\cdot\sigma_{\Delta})^{2} + \Delta_{s}^{2}}$$

  - pentru medie

$$\pm\varepsilon_{\lim}^{'} = \pm\sqrt{(\Delta_{\lim}^{'})^{2} + (\delta_{\lim}^{'})^{2}} = \pm\sqrt{\left(\frac{3\sigma_{\Delta}}{\sqrt{n}}\right)^{2} + \Delta_{s}^{2}}$$

Calculul erorilor la măsurările indirecte bazate pe relaţii explicite

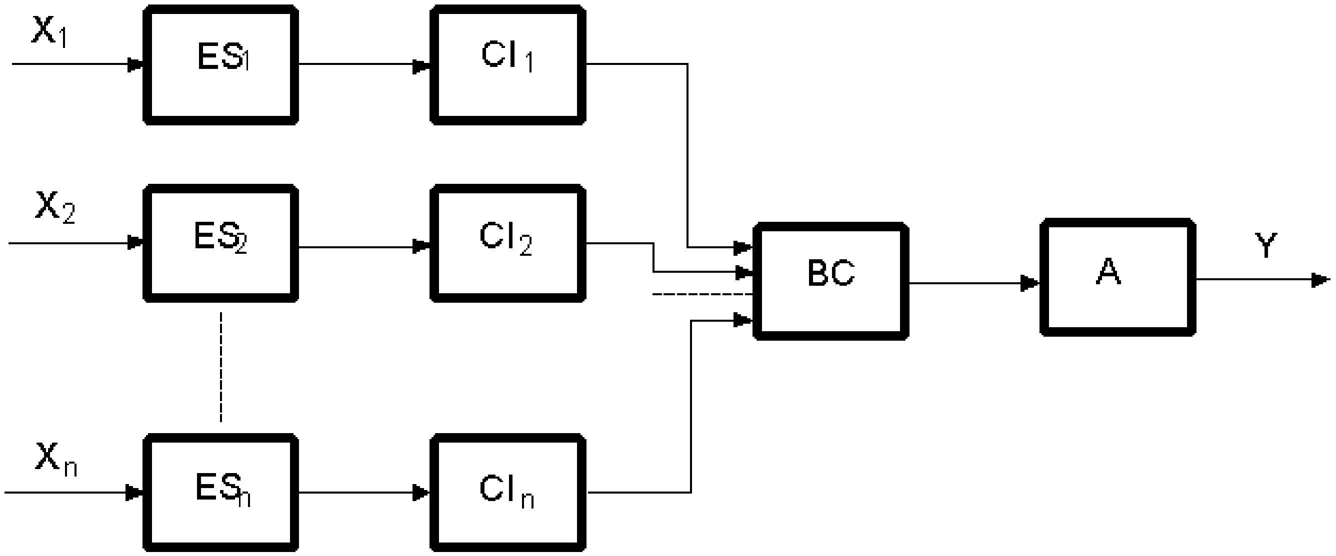
Metodele indirecte de măsurare pot fi:

- Bazate pe relaţii explicite
  - Bazate pe relaţii implicite

- Relaţia explicită:

$$Y = f(X_1, X_2, ..., X_n)$$

- Structura unui aparat:



Calculul erorilor la măsurările indirecte bazate pe relaţii explicite

- Fie relaţia explicită:

$$Y = f(X_1, X_2, ..., X_N) \quad (*)$$

care leagă mărimea indirect măsurabilă Y de mărimile direct măsurabile X_1, X_2, ..., X_N.

- Fiecare mărime va fi afectată de o eroare, adică:

$$\Delta Y = Y_m - Y; \quad \Delta X_1 = X_{1_m} - X_1; ..., \quad \Delta X_N = X_{N_m} - X_N$$

indicele "m" semnificând faptul că mărimea respectivă este rezultatul măsurării, astfel că:

$$\Delta Y = f(X_1 + \Delta X_1, X_2 + \Delta X_2, ..., X_N + \Delta X_N) - f(X_1, X_2, ..., X_N)$$

sau în valori relative

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{f(X_1 + \Delta X_1, X_2 + \Delta X_2, ..., X_n + \Delta X_n) - f(X_1, X_2, ..., X_n)}{f(X_1, X_2, ..., X_n)}$$

Calculul erorilor la măsurările indirecte bazate pe relaţii explicite

- Analizăm - în continuare - câteva cazuri particulare frecvent întâlnite în practica măsurărilor:

a) Relaţie explicită de tip produs: $Y = X_1 \cdot X_2$

Procedând ca la relaţia generală rezultă:

$Y + \Delta Y = (X_1 + \Delta X_1)(X_2 + \Delta X_2) = X_1 \cdot X_2 + X_1 \cdot \Delta X_2 + X_2 \cdot \Delta X_1$ (se neglijează $\Delta X_1 \cdot \Delta X_2$ fiind un infinit mic de ordin superior). Deci: $\Delta Y = X_1 \cdot \Delta X_2 + X_2 \cdot \Delta X_1$ şi

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta X_1}{X_1} + \frac{\Delta X_2}{X_2}$$

b) Relaţie explicită de tip cât: $Y = X_1 / X_2$

$$Y + \Delta Y = \frac{X_1 + \Delta X_1}{X_2 + \Delta X_2} = \frac{(X_1 + \Delta X_1)(X_2 - \Delta X_2)}{X_2^2 - (\Delta X_2)^2} = \frac{X_1 X_2 + X_2 \Delta X_1 - X_1 \Delta X_2 - \Delta X_1 \Delta X_2}{X_2^2 - (\Delta X_2)^2} \cong$$

$$\cong \frac{X_1 X_2 + X_2 \Delta X_1 - X_1 \Delta X_2}{X_2^2} = \frac{X_1}{X_2} + \frac{\Delta X_1}{X_1}\frac{X_1}{X_2} - \frac{\Delta X_2}{X_2}\frac{X_1}{X_2}$$

Calculul erorilor la măsurările indirecte bazate pe relaţii explicite

Prelucrând în continuare relaţia anterioară obţinem:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta X_1}{X_1} - \frac{\Delta X_2}{X_2}$$

Întrucât se consideră cazul cel mai defavorabil (eroarea maxim posibilă asupra lui Y), atunci trebuie să luăm:

$$\left|\frac{\Delta Y}{Y}\right|_{mp} = \frac{\Delta X_1}{X_1} + \frac{\Delta X_2}{X_2}$$

c) Relaţie explicită de tip sumă: $Y = X_1 + X_2$

Procedând similar rezultă:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{X_1}{X_1 + X_2} \cdot \frac{\Delta X_1}{X_1} + \frac{X_2}{X_1 + X_2} \cdot \frac{\Delta X_2}{X_2}$$

Calculul erorilor la măsurările indirecte bazate pe relaţii explicite

d) Relaţie explicită de tip diferenţă: $Y = X_1 - X_2$

pentru care

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{X_1}{X_1 - X_2} \cdot \frac{\Delta X_1}{X_1} - \frac{X_2}{X_1 - X_2} \cdot \frac{\Delta X_2}{X_2}$$

Deoarece se consideră cazul cel mai defavorabil rezultă:

$$\left|\frac{\Delta Y}{Y}\right|_{mp} = \frac{X_1}{|X_1 - X_2|} \cdot \left|\frac{\Delta X_1}{X_1}\right|_{mp} + \frac{X_2}{|X_1 - X_2|} \cdot \left|\frac{\Delta X_2}{X_2}\right|_{mp}$$

e) Relaţie explicită de tip produs de mărimi direct măsurabile la puteri diferite de 1 (de exemplu de forma):

$$Y = X_1^a X_2^b X_3^c$$

în care *a*, *b*, *c* sunt exponenţi pozitivi sau negativi, întregi sau fracţionari.

Calculul erorilor la măsurările indirecte bazate pe relaţii explicite

Procedând similar rezultă:

$$\left|\frac{\Delta Y}{Y}\right|_{mp} = |a| \cdot \left|\frac{\Delta X_1}{X_1}\right|_{mp} + |b| \cdot \left|\frac{\Delta X_2}{X_2}\right|_{mp} + |c| \cdot \left|\frac{\Delta X_3}{X_3}\right|_{mp}$$

❖ Cazurile particulare - evidenţiate mai sus - sunt consecinţe ale cazului general dedus astfel:

- presupunând funcţia *f* - relaţia (*) - continuă, şi având în vedere că erorile sunt mici, se procedează la dezvoltarea în serie Taylor a relaţiei (*):

$$Y + \Delta Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N) + \frac{\partial f}{\partial X_1}\Delta X_1 + \frac{\partial f}{\partial X_2}\Delta X_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial X_N}\Delta X_N + R$$

unde *R* cuprinde termenii dezvoltării de ordin superior care se neglijează.

Calculul erorilor la măsurările indirecte bazate pe relaţii explicite

Aşadar:

$$\Delta Y = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial X_k} \Delta X_k \qquad \text{sau} \qquad \frac{\Delta Y}{Y} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial X_k} \Delta X_k$$

Deoarece se consideră cazul cel mai defavorabil, rezultă că ultima relaţie trebuie scrisă în forma:

$$\left|\frac{\Delta Y}{Y}\right|_{mp} = \sum_{k=1}^{N} \left|\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial X_k}\right| \cdot \left|\Delta X_k\right| \quad (**)$$

Se observă că relaţia (**) poate fi scrisă ca diferenţiala logaritmică a funcţiei $f\,(X_1, X_2, ..., X_N)$, adică:

$$\left|\frac{\Delta Y}{Y}\right|_{mp} = \left|\mathrm{d}[\ln f\,(X_1, X_2, ..., X_N)]\right|$$

cu observaţia că, după efectuarea diferenţialei, se înlocuieşte $\mathrm{d}X_k$ cu ΔX_k, iar semnele “-” provenite de la diferenţiere se consideră cu "+", pentru a lua cazul maxim posibil.

Calculul erorilor la măsurările indirecte bazate pe relaţii explicite

Exemplificare: În cazul măsurării indirecte a rezistivităţii electrice conform relaţiei:

$$\rho = R\frac{S}{l}$$

unde *R* este rezistenţa electrică a unui conductor de lungime *l* şi secţiune *S*, rezultă:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \mathrm{d}\left[\ln R\frac{S}{l}\right] = \mathrm{d}[\ln R + \ln S - \ln l] = \frac{\mathrm{d}R}{R} + \frac{\mathrm{d}S}{S} - \frac{\mathrm{d}l}{l}$$

astfel că:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta S}{S} + \frac{\Delta l}{l}$$

Regulă: În cazul când mărimea indirect măsurabilă se exprimă prin produse sau rapoarte de mărimi direct măsurabile, eroarea relativă a mărimii indirect măsurabile este egală cu suma tuturor erorilor relative ale mărimilor direct măsurabile.

Prezentarea rezultatelor măsurărilor

- În general forma de prezentare a rezultatului măsurării este $V \pm \Delta V_{ad}$ unde V reprezintă fie o valoare individuală V_i, fie valoarea medie m_v a unui şir de n rezultate individuale, iar ΔV_{ad} reprezintă eroarea admisibilă (incertitudinea) pentru valoarea V, adică eroarea totală cu care este creditată V pentru un anumit nivel de încredere admis.

- În funcţie de erorile predominante avem următoarele situaţii:

  a) măsurări de precizie medie sau redusă la care predominante sunt erorile sistematice;

  b) măsurări de precizie medie la care erorile aleatorii sunt importante;

  c) măsurări de mare precizie la care se ţine seama de ambele categorii de erori.

Vom analiza, în continuare, cele trei categorii de măsurări privite prin prisma prezentării rezultatului măsurării.

Prezentarea rezultatelor măsurărilor

a) Acest caz corespunde situaţiilor când se efectuează o singură determinare.

- Dacă măsurările sunt afectate numai de erori sistematice necontrolabile, atunci, pentru un rezultat individual V_i, rezultă:

$$X = V_i \pm \Delta_s \quad \text{sau} \quad X \in [V_i - \Delta_s; V_i + \Delta_s]$$

unde Δ_s este eroarea tolerată dedusă din clasa de precizie ($\Delta_s = \Delta X_{ad}$).

- Dacă există şi erori sistematice controlabile se introduce corecţia $c = -\delta_0$, rezultând valoarea corectată $V_c = V_i + c$, iar

$$X = V_i + c \pm \Delta_s \quad \text{sau} \quad X \in [V_i + c - \Delta_s; V_i + c + \Delta_s]$$

Prezentarea rezultatelor măsurărilor

b) Se fac mai multe determinări şi se exprimă rezultatul prin intermediul valorii medii m_v:

- dacă numărul de determinări este $n \geq 20$

$$X = m_V \pm \frac{3\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \quad \text{cu} \quad \eta = 0{,}9973$$

- dacă numărul de determinări este $n \leq 10$

$$X = m_V \pm t\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \quad \text{cu} \quad \eta = 0{,}99$$

iar, prin considerarea rezultatelor individuale V_i, se poate scrie:

$$X = V_i \pm 3\hat{\sigma} \quad \text{cu} \quad \eta = 0{,}9973 \quad \text{pentru } n \geq 20$$

respectiv

$$X = V_i \pm t\hat{\sigma} \quad \text{cu} \quad \eta = 0{,}99 \quad \text{pentru } n \leq 10$$

Prezentarea rezultatelor măsurărilor

c) În ipoteza că erorile sistematice controlabile au fost corectate (sau sunt neglijabile), apărând numai erori sistematice necontrolabile şi erori aleatorii, atunci:

- dacă numărul de determinări este $n \geq 20$

$$X = m_v \pm \sqrt{\left(\frac{3 \cdot \hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right)^2 + \Delta_s^2}$$

$$X = V_i \pm \sqrt{(3 \cdot \hat{\sigma})^2 + \Delta_s^2}$$

- dacă numărul de determinări este $n \leq 10$

$$X = m_v \pm \sqrt{\left(t \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right)^2 + \Delta_\mathrm{s}^2}$$

$$X = V_i \pm \sqrt{(t \cdot \hat{\sigma})^2 + \Delta_\mathrm{s}^2}$$

Prezentarea rezultatelor măsurărilor

Dacă apar şi erori sistematice controlabile, atunci:

- când numărul de determinări este $n \geq 20$

$$X = m_v - \delta_0 \pm \sqrt{\left(\frac{3 \cdot \hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right)^2 + \Delta_s^2}$$

$$X = V_i - \delta_0 \pm \sqrt{(3 \cdot \hat{\sigma})^2 + \Delta_s^2}$$

- când numărul de determinări este $n \leq 10$

$$X = m_v - \delta_0 \pm \sqrt{\left(t \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right)^2 + \Delta_\mathrm{s}^2}$$

$$X = V_i - \delta_0 \pm \sqrt{(t \cdot \hat{\sigma})^2 + \Delta_\mathrm{s}^2}$$

Prezentarea rezultatelor măsurărilor

Observaţii

1. Numărul de cifre semnificative, prin care se exprimă rezultatul, este determinat de valoarea erorii admisibile (se procedează la rotunjire folosind regulile cunoscute: dacă ultima cifră este < 5 penultima rămâne nemodificată, iar dacă ultima cifră este ≥ 5 se incrementează penultima cu o unitate).
2. Pentru situaăiile **b)** şi **c)** în care s-a pus în evidenţă valoarea medie m_v - valoarea cea mai probabilă sau cea mai apropiată de valoarea reală X - exprimarea rezultatului se face, în general, numai prin formulele scrise în raport cu m_v, cele la care se foloseşte rezultatul individual V_i conducând la intervale de încadrare mult mai mari.