Elemente de teoria probabilitatilor

I. <u>Probabilitati definite pe câmpuri finite de evenimente</u>

Câmp de evenimente

Vom numi *sistem de evenimente* o multime de evenimente care pot aparea într-un experiment precizat (de exemplu multimea tuturor valorilor pe care le ia o marime fizica la repetarea experimentului în conditii de experimentare identice).

Evident, sistemul de evenimente poate fi *finit* - daca contine un numar finit de evenimente - sau *infinit* - daca are o infinitate de evenimente.

D.1. *Evenimentul sigur* sau *total* este evenimentul care are loc întotdeauna într-un experiment dat; îl vom nota cu E.

D.2. *Evenimentul opus* sau *complementarul* unui eveniment oarecare A si care consta în nerealizarea lui A îl vom nota cu $\bar{A}$. Complementarul evenimentului sigur E este evenimentul imposibil pe care îl notam cu Φ.

D.3. Fie A si B doua evenimente din acelasi sistem; evenimentul care consta în aparitia fie a evenimentului A, fie a evenimentului B, se numeste evenimentul *reuniune* si se noteaza $A \cup B$ (A sau B).

Elemente de teoria probabilitatilor

D.4. Fie A si B doua evenimente care apartin aceluiasi sistem; evenimentul care consta în aparitia simultana a ambelor evenimente se numeste *intersectia* evenimentelor si se noteaza $A \cap B$ (A si B).

D.5. Se numeste *câmp de evenimente* o multime $\mathcal{F}$ pentru care:

- evenimentul sigur E apartine lui $\mathcal{F}$;
- pentru orice eveniment $A \in \mathcal{F}$, contrarul sau $\bar{A} \in \mathcal{F}$;
- daca A si B sunt doua evenimente din $\mathcal{F}$, atunci si reuniunea lor $A \cup B$ este un eveniment din $\mathcal{F}$;
- daca multimea $\mathcal{F}$ contine o infinitate de evenimente - fie $A_i \in \mathcal{F}$ - atunci reuniunea unei infinitati numarabile de evenimente, $\cup A_i$, apartine multimii $\mathcal{F}$.

Concluzie: câmpul de evenimente poate fi finit sau infinit dupa cum $\mathcal{F}$ contine un numar finit sau infinit de evenimente distincte.

Proprietati:

♦ evenimentul imposibil $\Phi \in \mathcal{F}$;

♦ intersectia $A \cap B$ a doua evenimente oarecare din $\mathcal{F}$ apartine - de asemenea - câmpului de evenimente $\mathcal{F}$.

Elemente de teoria probabilitatilor

Probabilitate

D.6. Se numeste *probabilitate* pe câmpul de evenimente $\mathcal{F}$ o functie P(A), pozitiva, definita pentru orice eveniment $A \in \mathcal{F}$ pentru care:

- P(E) = 1, unde E este evenimentul sigur;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, daca $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$ si $A \cap B = \Phi$;
- daca $\mathcal{F}$ este un câmp infinit de evenimente atunci

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i), \quad \text{cu} \quad A_i \in \mathcal{F} \quad \text{si} \quad A_i \cap A_j = \Phi \text{ pentru } i \neq j$$

Proprietati:

- ♦ $P(\Phi) = 0$
- ♦ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, pentru $A \in \mathcal{F}$
- ♦ $0 \leq P(A) \leq 1$, pentru $A \in \mathcal{F}$
- ♦ Daca $A \subset B$, cu $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$, atunci $P(A) \leq P(B)$
- ♦ Daca $A \cap B \neq \Phi$, cu $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$, atunci $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- ♦ Daca $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - evenimente din $\mathcal{F}$ - sunt incompatibile doua câte doua, atunci

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

Elemente de teoria probabilitatilor

D.7. Se numeste *eveniment elementar* al câmpului $\mathcal{F}$ un eveniment $A \in \mathcal{F}$, $A \neq \Phi$, pentru care, fata de oricare alt eveniment $B \in \mathcal{F}$, $B \neq A$, se poate scrie una din situatiile

$$A \cap B = \Phi, \; A \subset B$$

Nota. Definitia este valabila si pentru câmpuri infinite de evenimente.

Proprietati:

♦ Evenimentele elementare ale unui câmp $\mathcal{F}$, finit sau infinit, sunt incompatibile (disjuncte).

♦ Reuniunea a doua evenimente elementare $E_i \in \mathcal{F}$, $E_j \in \mathcal{F}$, este un eveniment $E_i \cup E_j = A \neq \Phi$, unde A este diferit de oricare eveniment elementar al câmpului $\mathcal{F}$.

♦ Intr-un câmp finit $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ orice eveniment $A_i \neq \Phi$ este fie un eveniment elementar, fie o reuniune de evenimente elementare. In consecinta evenimentul sigur E este reuniunea tuturor evenimentelor elementare.

Elemente de teoria probabilitatilor

Probabilitati conditionate; evenimente independente; sistem complet de evenimente

D.8. *Probabilitatea conditionata* a evenimentului B în raport cu A - notata $P_A(B)$ - este data de egalitatea

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{in ipoteza} \quad P(A) \neq 0$$

D.9. Doua *evenimente* A si B ale unui câmp $\mathcal{F}$ sunt *independente* daca are loc egalitatea $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ → definitia poate fi extinsa la n evenimente independente din $\mathcal{F}$.

D.10. Daca $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ este o multime de evenimente ale unui câmp $\mathcal{F}$, atunci $S = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ se spune ca este un *sistem complet de evenimente* daca evenimentele $A_1, A_2, ..., A_n$ sunt doua câte doua incompatibile, iar reuniunea lor este evenimentul sigur, adica: $A_i \cap A_j = \Phi$, pentru $i \neq j$ si $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = E$.

Fie X un eveniment oarecare din $\mathcal{F}$ si $S = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ un sistem complet de evenimente din $\mathcal{F}$. Se poate scrie: $P(X) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(X) + P(A_2) \cdot P_{A_2}(X) + \ldots + P(A_n) \cdot P_{A_n}(X)$

iar daca $P(X) \neq 0$ →
$$P_X(A_k) = \frac{P(A_k) \cdot P_{A_k}(X)}{P(X)} = \frac{P(A_k) \cdot P_{A_k}(X)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P_{A_i}(X)}$$
egalitate care se numeste *formula lui Bayes* pentru probabilitati conditionate.

Elemente de teoria probabilitatilor

II. <u>Probabilitati pe câmpuri infinite</u>

Variabila aleatorie

Fie $\mathcal{F}$ un camp de evenimente unidimensional, finit sau infinit, pe care este data o lege de probabilitate (se poate calcula probabilitatea oricarui eveniment din $\mathcal{F}$). $\mathcal{F}$ este un *camp probabilizat*.

Consideram cazul particular in care multimea evenimentelor elementare – notata E - apartine axei reale.

D.11. Se numeste *variabila aleatorie* o functie reala $\xi = f(M)$, definita pe multimea E a evenimentelor elementare, cu proprietatea ca, oricare ar fi numarul real ***a***, multimea punctelor $M \in E$ pentru care $f(M) \leq \boldsymbol{a}$ este un eveniment din $\mathcal{F}$.

Vom nota cu $P(a < \xi < b)$ probabilitatea ca un punct ξ luat la intamplare sa apartina intervalului (a, b); analog, prin $P(\xi \leq a)$ intelegem probabilitatea ca punctul ξ luat la intamplare sa apartina intervalului $(-\infty, a]$ etc.

Elemente de teoria probabilitatilor

D.12. Se numeste *functie de repartitie* a variabilei aleatorie ξ functia:

$$F(x) = P(\xi \le x), \quad x \in \Re$$

Proprietati: $0 \le F(x) \le 1$, $\quad F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1; \quad F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

Daca $a \in \Re, b \in \Re$ si $a < b$ atunci $P(a \le \xi \le b) = F(b) - F(a)$

D.13. Fie $F(x)$ functia de repartitie a unei variabile aleatorii ξ. Daca exista o functie pozitiva $\rho(x)$, integrabila pe intervalul $(-\infty, +\infty)$, cu proprietatea ca pentru orice $x \in \Re$ este verificata egalitatea:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(x) \mathrm{d}x$$

atunci $\rho(x)$ se numeste *densitatea de repartitie* sau *densitatea de probabilitate* a variabilei aleatorii ξ.

Elemente de teoria probabilitatilor

Observatie: In cazul prelucrarii datelor experimentale se lucreaza – in general – cu repartitii continue, asadar functia de repartitie $F(x)$ este derivabila, deci vom avea urmatoarele proprietati:

$$F'(x) = \rho(x); \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)\mathrm{d}x = 1; \quad P(a \le \xi \le b) = \int_a^b \rho(x)\mathrm{d}x$$

D.14. Se numeste *valoare medie* a functiei $\varphi(x)$ – unde $\varphi(x)$ este continua pentru orice $x \in \Re$ - in raport cu repartitia $F(x)$, integrala:

$$\overline{\varphi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}F(x)$$

in ipoteza ca integrala este convergenta.

Elemente de teoria probabilitatilor

Important: Daca repartitia variabilei ξ este continua, atunci d$F(x) = \rho(x)\cdot$dx si valoarea medie a functiei $\varphi(x)$ poate fi exprimata printr-o integrala Riemann:

$$\overline{\varphi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot \rho(x) \mathrm{d}x$$

unde $\rho(x)$ este densitatea de repartitie.

- Analog se definesc:
  - momentul de ordinul k al variabilei aleatorii ξ:

$$M[\xi^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \rho(x) \mathrm{d}x$$

Elemente de teoria probabilitatilor

- valoarea medie de ordinul k a variabilei aleatorii ξ:

$$M_k[\xi] = \{M[\xi^k]\}^{\frac{1}{k}}$$

- momentul centrat de ordinul k al variabilei aleatorii ξ:

$$M[\overset{\circ}{\xi}{}^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \overline{\xi})^k \rho(x)\mathrm{d}x$$

unde:

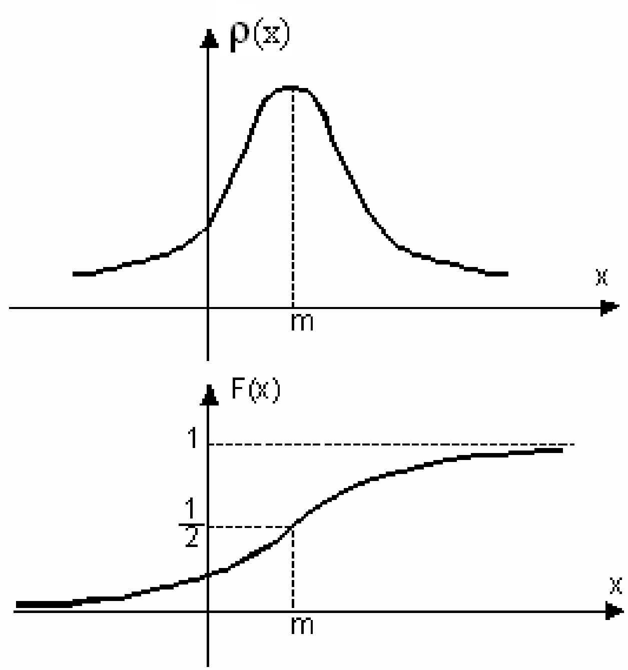
$$\overline{\xi} = M_1[\xi] = M[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\rho(x)\mathrm{d}x$$

<u>NOTA</u>: Momentul centrat de ordinul 2 se numeste *dispersie* – notata D(ξ) – sau *abatere medie patratica* – notata σ^2.

Repartitii utilizate in prelucrarea datelor experimentale

D.15. O variabila aleatorie ξ care ia o infinitate de valori se spune ca este supusa unei legi normale (gaussiene) de probabilitate, daca densitatea de repartitie a variabilei ξ este:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$



unde $m = M[\xi]$ – valoarea medie; $\sigma^2 = D(\xi)$ – dispersia, abaterea medie patratica.

Reprezentarea grafica a densitatii, respectiv functiei de repartitie, pentru legea normala este (figura …)

Important: Repartitia normala se foloseste la caracterizarea abaterilor (erorilor) aleatorii provenite din selectii de volum ridicat

Repartitii utilizate in prelucrarea datelor experimentale

D.16. O variabila aleatorie ξ care ia o infinitate de valori se spune ca este supusa unei *legi de repartitie Student* (*repartitie t*), daca densitatea de repartitie a variabilei ξ este

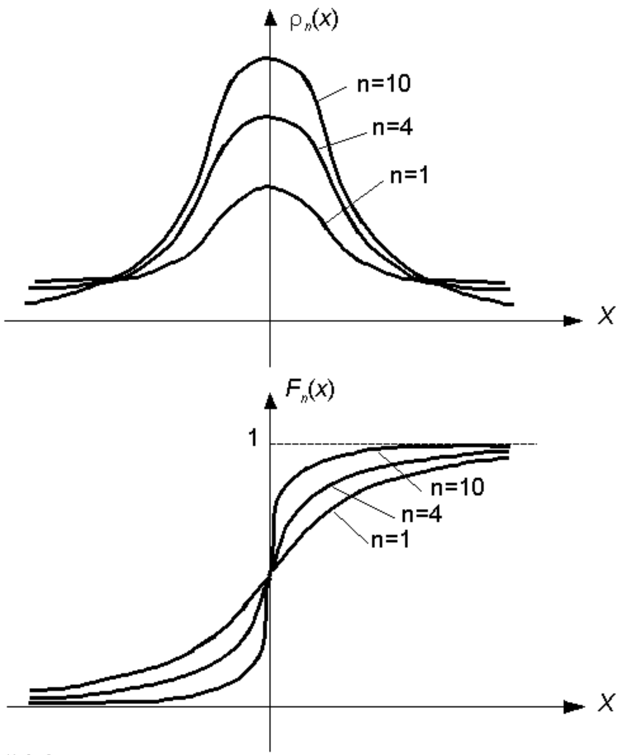
$$\rho_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} (1 + \frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$$

unde

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

este functia gama, iar n reprezinta numarul gradelor de libertate.

Reprezentarea este cea din figura …



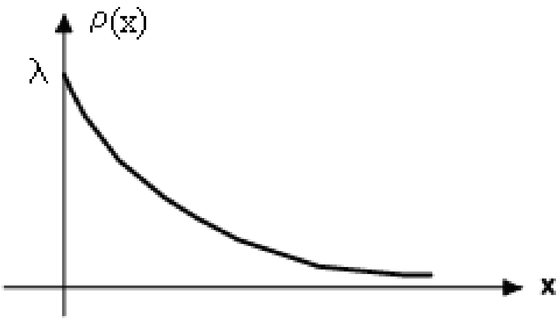
Remarca: Repartitia “bidimensionala” Student (x si n) tinde catre repartitia unidimensionala normala daca n→∞

Important: Repartitia Student se utilizeaza la caracterizarea abaterilor (erorilor) aleatorii provenite din selectii de volum mic

Repartitii utilizate in prelucrarea datelor experimentale

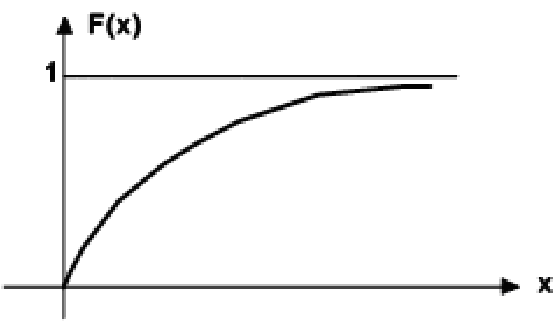
D.17. O variabila aleatorie ξ care ia o infinitate de valori se spune ca este supusa unei *legi de repartitie exponentiale*, daca densitatea de repartitie a variabilei ξ este de forma

$$\rho(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{daca} \quad x > 0 \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$$



Functia de repartitie a unei variabile aleatorii ξ repartizata exponential este data de relatia

$$F(x) = \lambda \int_0^x e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x}$$



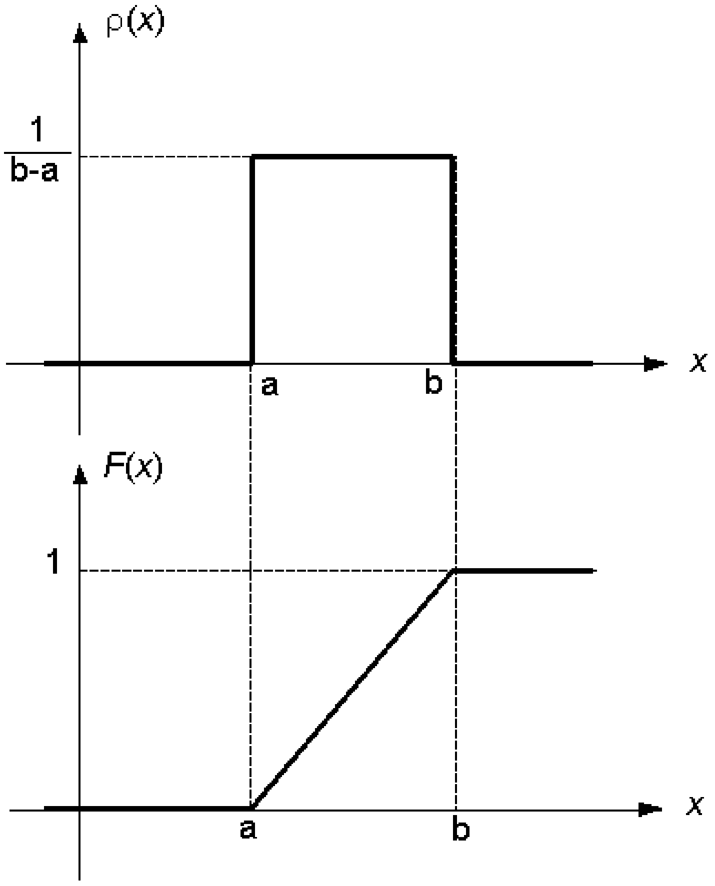
Reprezentarea densitatii si functiei de repartitie a unei variabile aleatorii repartizata exponential este dat in figura....

Important: Repartitia exponentiala are aplicabilitate în studiul sigurantei de masurare a diferitelor instrumente, ca si în analiza fiabilitatii previzionale a acestora.

Repartitii utilizate in prelucrarea datelor experimentale

D.18. O variabila aleatorie ξ care ia o infinitate de valori intr-un interval [*a*, *b*] se spune ca este supusa unei legi de repartitie uniforme, daca densitatea de repartitie a variabilei ξ este:

$$\rho(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b; \quad b > a \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$$



Repartitia uniforma are reprezentarea din figura …

Important: Repartitia uniforma este utilizata pentru caracterizarea abaterilor (erorilor) cu caracter sistematic de natura necontrolabila pentru care se estimeaza un interval de incadrare.